

Conditions aux limites en sortie pour les écoulements ouverts dans les cavités interdisques en rotation

S.Rodriguez^{ab}, B.Viaud^a, E.Serre^b

a. Centre de recherche de l'armée de l'air, CReA BA701, 13661 Salon Air

b. M2P2, CNRS Universités Aix Marseille, IMT Chateau-Gombert, 13452 Marseille

Résumé :

On introduit de nouvelles conditions aux limites qui ont été adaptées à l'étude des écoulements 3D en rotation, proposant ainsi une alternative aux conditions aux limites convectives communément employées. Une méthode quantitative a ensuite été développée afin d'évaluer la qualité des différents types de conditions aux limites. L'onde réfléchie induite en sortie par les conditions aux limites a été mesurée. Dans le cas de conditions aux limites convectives, l'impact du choix de la vitesse d'advection souvent réglée à la main, et servant au calibrage de celles-ci, a également été étudié.

Abstract :

In this paper we introduce new boundary conditions that have been adapted for three-dimensional rotating flows proposing an alternative to the convective boundary conditions commonly used. A quantitative method has then been developed to evaluate the quality of the different types of boundary conditions i.e the refracted wave induced at the cavity outlet is measured. As for the classical convective boundary conditions, the influence of the choice of the advection velocity has been investigated.

Mots clefs : cavité interdisques ; écoulements ouverts ; conditions aux limites

1 Introduction

On s'intéresse à la stabilité des écoulements ouverts en domaine fini au contact de disques en rotation.

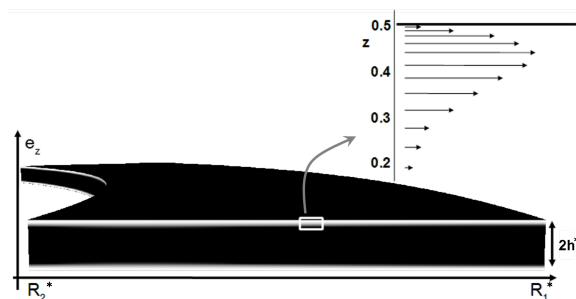


FIG. 1 – Configuration cavité en rotation d'ensemble, représentant le profil de vitesse radiale dans la cavité avec près des disques la couche limite d'Ekman. R_2^* et R_1^* désignent respectivement les rayons d'entrée et de sortie de la cavité de hauteur $2h^*$.

La configuration simulée (Figure 1) est celle d'une cavité en rotation formée par deux disques plans parallèles avec flux radial forcé au moyeu. Cette configuration est un modèle simple mais pertinent pour des écoulements rencontrés dans les turbomachines (entre deux disques porte-aubages) ainsi qu'en géophysique (couche limite atmosphérique et océanique). Elle présente également un intérêt

académique comme exemple de couche limite 3D. En effet l'existence d'une solution laminaire connue fait de l'écoulement au voisinage d'un disque tournant un bon candidat pour l'analyse de stabilité. La cavité ouverte introduisant en plus du taux de rotation, un second paramètre de contrôle, le débit forcé. Elle a ainsi été employée par Viaud et al. [1] pour l'étude des scénarii de transition à la turbulence. Cependant l'extrême sensibilité du processus de transition au bruit ambiant rend ce type d'étude dépendant de la qualité des conditions de sortie qui ne doivent pas générer de réflexions parasites, même au passage de perturbations ayant atteint leur saturation. Les équations de Navier Stokes incompressibles sont résolues par Simulation Numérique Directe (DNS) pseudo-spectrale [2]. L'emploi d'une méthode spectrale qui propage toutes les perturbations rend encore plus critique la transparence des conditions aux limites de sortie. Halpern et Schatzmann [3] ont montré que des conditions aux limites complètement transparentes auraient une expression intégrale et ne sont donc pas applicables localement. Des conditions approchées, dites absorbantes, ont alors été recherchées, et Orlanski [4] propose des conditions de Sommerfeld dites conditions convectives, satisfaites par des ondes se propageant perpendiculairement à la frontière. De telles conditions aux limites créant une instabilité lorsque l'on combine onde entrante et onde sortante, Ruith et al. [5] préconise des conditions de la forme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + C \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

où C désigne la vitesse d'advection constante et fixée arbitrairement de manière à assurer la conservation du débit par exemple, plutôt qu'une vitesse de propagation locale comme dans [4]. L'équation (1) est résolue localement à la sortie à chaque pas de temps pour obtenir des conditions de Dirichlet instationnaires sur les trois composantes de la vitesse.

Fournier et al. [6] propose une alternative à ces conditions aux limites convectives dans le cas d'un écoulement de paroi laminaire 2D. Ces auteurs proposent de remplacer les équations de Navier Stokes (ENS) dans le plan de sortie par les équations de couche limite. En effet, idéalement on voudrait résoudre les ENS mais celles-ci sont elliptiques du fait de la présence de plus d'une direction de l'espace dans les termes de dérivée seconde. A contrario, les équations de couche limite sont paraboliques puisque seule la dérivée seconde dans la direction normale à la paroi est conservée. De plus, les équations de couche limite ont la particularité de supporter les mêmes modes d'instabilité que les ENS, ce qui doit limiter les réfractions entre le domaine décrit par les ENS et le plan de sortie décrit par les équations de couche limite. Dans le cas d'une couche limite de Blasius pour un écoulement se faisant dans la direction x, les conditions aux limites proposées par Fournier et al. [6] s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_x \frac{\partial u}{\partial x} + u_y \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

2 Conditions aux limites pour les écoulements en rotation

Dans la suite du texte, l'étoile dénote des grandeurs dimensionnées. Dans le cas d'une cavité en rotation d'ensemble à la vitesse Ω , l'écoulement stationnaire est constitué d'un coeur géostrophique en rotation quasi-solide, où les forces de Coriolis équilibrent le gradient de pression, encadré par deux couches d'Ekman au contact des disques. L'écoulement possède une longueur caractéristique, $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$, dite échelle d'Ekman. On définit deux paramètres de contrôle globaux, le nombre de Reynolds $Re = \Omega R_1^2/\nu$ pour la rotation, et le paramètre de débit $Cw = Q^*/\nu R_1^*$ avec Q^* le débit massique au moyeu. On appelle vitesse géostrophique V_g^* la vitesse azimutale dans le coeur, et on introduit un nombre de Rosby $Ro = V_g^*/\Omega r^*$. La conservation du débit impose que $V_g^*(r)$ varie comme $1/r$ et Ro comme $1/r^2$. Dans la limite des grands taux de rotation, l'écoulement au voisinage des disques tournants admet une solution asymptotique, obtenue par raccordement de deux solutions d'Ekman. Dans la solution d'Ekman, le champ des vitesses est obtenu comme solution du système (3) dérivé des ENS axisymétriques après linéarisation (en supposant que la force de Coriolis domine les effets inertiels,

voir figure 2) et en faisant une hypothèse de type couche limite, puis d'équilibre géostrophique.

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} - 2\Omega(v^* - v_g^*) - \nu \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} - \frac{u^*}{r^{*2}} \right) = 0 \\ \frac{\partial v^*}{\partial t} + 2\Omega u^* - \nu \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} - \frac{v^*}{r^{*2}} \right) = 0 \\ \frac{\partial w^*}{\partial t} - \nu \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

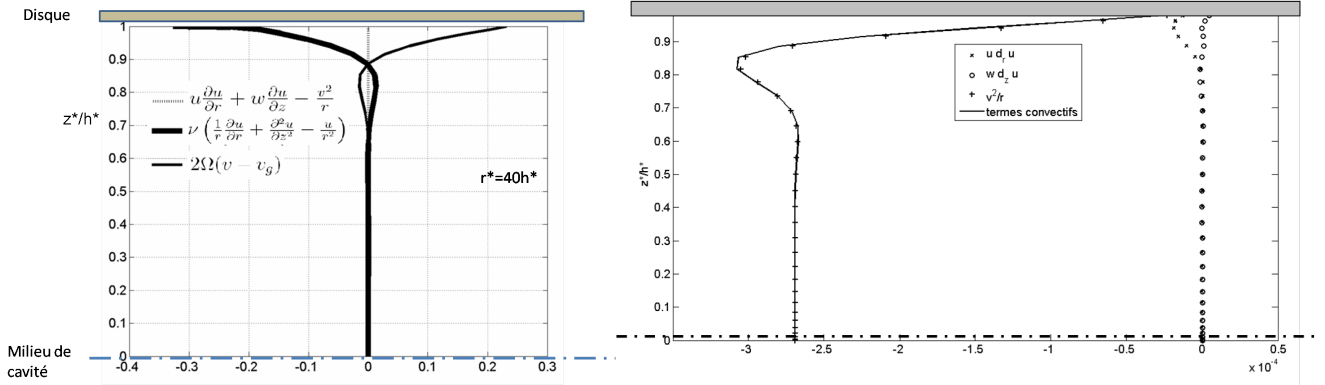


FIG. 2 – Ordres de grandeur des différents termes de l'équation de quantité de mouvement dans la direction radiale pour la solution laminaire dans une cavité entre $R_2^* = 30h^*$ et $R_1^* = 50h^*$ avec $Re = 487500$ et $Cw = 500$. (a) En gras les termes diffusifs, en plein la force de Coriolis et en pointillés les termes convectifs. Le calcul est fait en $r^* = 40h^*$ correspondant à $Ro = 0,114$. (b) Contributions des 3 termes participant aux effets convectifs. Le terme en v^2/r domine.

Le système (3) parabolique, présente les caractéristiques requises pour jouer dans notre configuration, le rôle des équations (2) dans le cas de la couche de Blasius. Les équations sont adimensionnées en prenant comme grandeurs de référence, $l_{ref} = h^*$, $t_{ref} = \Omega^{-1}$ et $v_{ref} = \Omega R_1^*$, pour donner le système (4) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2(v - v_g) - \frac{4}{Re_h} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2u - \frac{4}{Re_h} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{4}{Re_h} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

avec $Re_h = 4 \left(\frac{h}{\delta} \right)^2$ le nombre de Reynolds comparant l'épaisseur de la cavité et l'échelle d'Ekman.

Lorsque l'on augmente le flux radial forcé (Cw), les forces d'inertie non linéaires ne peuvent plus être négligées. Ainsi, pour $Cw = 500$, 3 à 4 ordres de grandeur séparent les effets diffusifs et convectifs, pour $Cw = 2000$ 2 ordres de grandeurs seulement les séparent. Le système (4) doit être modifié pour en tenir compte, il devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + R_1 \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) - 2(v - v_g) - \frac{4}{Re_h} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + R_1 \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{r} \right) + 2u - \frac{4}{Re_h} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + R_1 \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{4}{Re_h} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

On utilise un schéma d'Euler en temps d'ordre 1 pour des raisons de stabilité. Les dérivées dans la direction axiale sont calculées à l'aide d'une matrice de dérivation dans l'espace spectral. Les dérivées dans la direction radiale, elles, sont calculées par différences finies car [5] a montré qu'une approximation locale donnait de meilleurs résultats.

3 Méthode d'évaluation des conditions aux limites

3.1 Principe de la méthode

A la sortie du domaine, le champ instationnaire est la somme de deux ondes distinctes : une onde incidente correspondant au passage de la perturbation, et une onde réfléchie, d'amplitude moindre et très vite amortie, induite par les conditions aux limites. On suppose que sur une distance suffisamment petite, la longueur d'onde λ du paquet d'ondes traversant la frontière ainsi que son amplitude peuvent être considérées comme constantes. On cherche à reconstruire une onde correspondant à ce paquet d'ondes, en utilisant la forme générale $A\cos(r/\lambda + \phi)$. Pour obtenir λ , il faut effectuer une FFT sur un paquet d'ondes sans subir l'influence des effets d'inhomogénéité spatiale de l'écoulement de base et de proximité de la frontière. A cette fin, on simule avec le code DNS la réponse impulsionnelle d'un écoulement strictement homogène dans la direction r construit en recopiant sur l'ensemble du domaine les profils de vitesse de l'écoulement de base capturés dans le plan de sortie. La phase ϕ est ensuite déterminée par une méthode d'auto-correlation. Enfin, l'amplitude A de l'onde reconstruite est identifiée avec la méthode des moindres carrés. On considère que l'onde ainsi reconstruite correspond à l'onde incidente. Par différence avec l'onde simulée, on obtient alors l'onde réfléchie. La Figure 3.a montre le passage d'un paquet d'ondes à travers la frontière extérieure. On se place alors sur un intervalle de longueur λ sur lequel on reconstruit l'onde incidente et l'onde réfléchie (Figure 3.b).

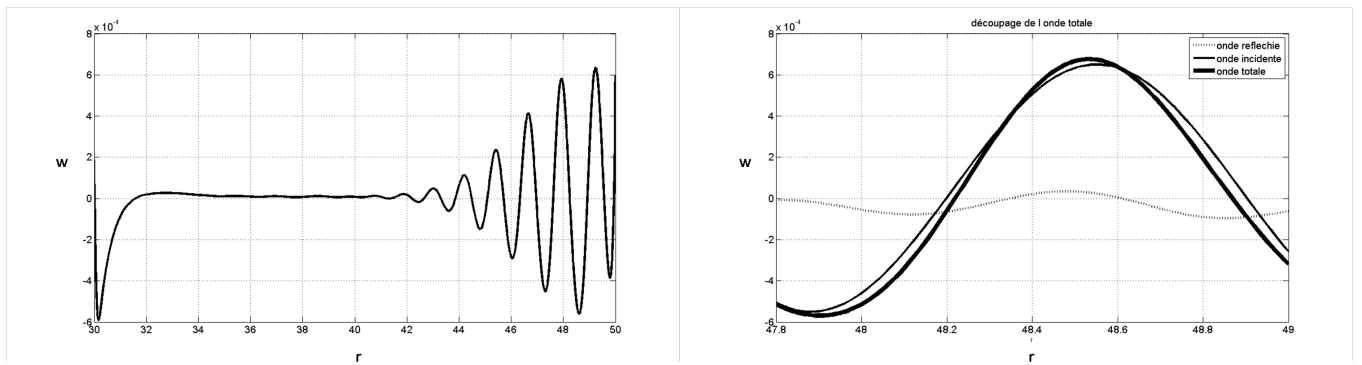


FIG. 3 – (a) Passage d'une perturbation à la frontière, visualisé en traçant le champ de vitesse axiale pour θ et z fixés. (b) Tracé de l'onde traversant la frontière (en gras) et de sa décomposition en onde incidente (en plein) et onde réfléchie (en pointillés) ; simulation conduite avec des conditions convectives en sortie.

3.2 Comparaison des différentes conditions de sortie

La méthode présentée a été utilisée afin de déterminer les ondes réfléchies induites par des conditions aux limites convectives puis par les conditions que nous proposons avec ou sans les termes non-linéaires. On se place d'abord dans le cas où les forces d'inertie sont négligeables devant les effets de Coriolis (pour des valeurs de Cw modérées par rapport au nombre de Reynolds de rotation). Les calculs ont été menés avec une même solution de départ, présentant une perturbation développée en milieu de cavité correspondant à une instabilité de type II convectif [1] obtenue comme la réponse impulsionnelle de l'écoulement à une perturbation localisée en temps et en espace, de nombre d'onde azimutal $\beta = 0$. L'écoulement stationnaire initial correspondant à $Re = 487500$ et $Cw = 500$, ces valeurs des paramètres de contrôle font du type II convectif la seule instabilité non amortie. Le calcul a alors été repris avec chacune des conditions aux limites jusqu'à ce que le paquet d'ondes traverse la frontière extérieure du domaine. En particulier, nous avons examiné l'influence des termes non-linéaires du système (5), même à Cw modéré. La Figure 2.b montre que le groupement v^2/r est dominant parmi les termes convectifs. Par ailleurs, les groupements incluant des dérivées $u\partial u/\partial r$ et $w\partial u/\partial z$ posent des difficultés de stabilité numérique. Ces considérations sont également valables pour les deux autres équations du système (5). Nous avons donc choisi de ne conserver que les groupements en v^2/r et uv/r .

Les ondes réfléchies ont été représentées sur un même graphique sur la Figure 4. L'onde réfléchie par les nouvelles conditions aux limites linéarisées possède une amplitude \tilde{A} inférieure à celle \tilde{A}_c induite par des conditions aux limites convectives avec $\tilde{A}/\tilde{A}_c = 0.78$. En conservant les termes non-linéaires dominant v^2/r et uv/r dans les équations 5.a et 5.b respectivement, l'amplitude \tilde{A} est encore réduite avec $\tilde{A}/\tilde{A}_c = 0.47$. La longueur d'onde observée de l'onde réfléchie semble correspondre à la moitié de celle de l'onde incidente avec un écart inférieur à 1%.

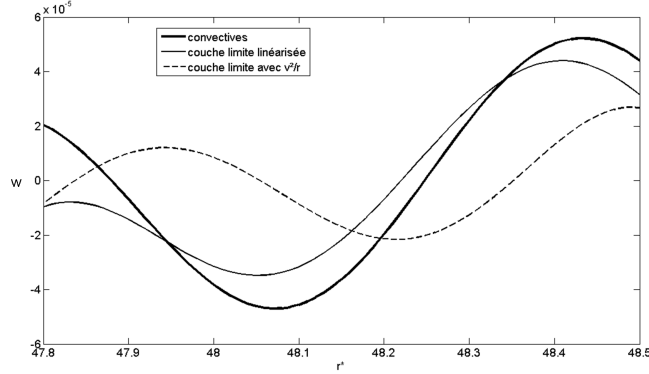


FIG. 4 – Comparaison entre ondes réfléchies : obtenue avec les conditions aux limites convectives (en gras), obtenue avec les nouvelles conditions linéarisées (trait plein), et avec des termes non-linéaires (en pointillés).

Dans le cas de conditions aux limites convectives, différentes valeurs de la vitesse d'advection comprises entre $0.05V_\Phi$ et $10V_\Phi$ ont été testées, V_Φ étant la vitesse de phase du paquet d'ondes incident. L'amplitude de l'onde réfléchie rapportée à celle de l'onde incidente a été tracée sur la Figure 5 en fonction de la vitesse d'advection. L'amplitude de l'onde réfléchie est sensiblement constante et égale à 5.7% de l'amplitude de l'onde incidente, ce qui montre que le choix de la vitesse d'advection n'influe pas sur la qualité des conditions aux limites, en accord avec les observations de [5].

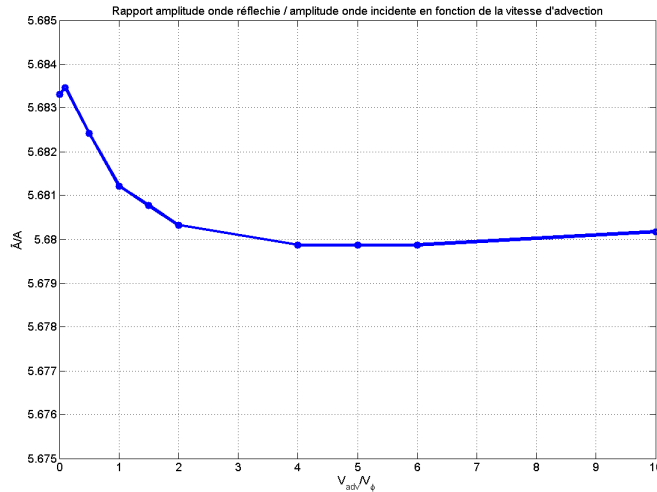


FIG. 5 – Amplitude de l'onde réfléchie pour différentes valeurs de la vitesse d'advection.

Dans le cas où les forces d'inertie cessent d'être négligeables (e.g $Cw=2000$) les conditions de couche limite linéarisées dégradent la solution à longue échéance par rapport aux conditions convectives, L'introduction des termes en v^2/r permet de retrouver un comportement équivalent à celui obtenu avec des conditions convectives. La mesure quantitative de l'onde réfléchie, dans ce cas, demande un maillage très fin pour éviter l'aliasing dû aux instabilités extrêmement intenses qui se forment. Ces

simultaions lourdes sont encore en cours.

4 Conclusions

Le développement de nouvelles conditions de sortie présentant une alternative aux conditions limites convectives communément utilisées a été effectué pour un code spectral dédié à l'étude des écoulements de disque tournant. Elles ont été obtenues en résolvant localement un jeu d'équations paraboliques dérivées de celles régissant le mouvement du fluide dans le domaine de façon à supporter les mêmes modes d'instabilité. Une méthode quantitative a alors été développée afin d'évaluer la transparence des différents types de conditions de sortie. Cette méthode a ainsi été utilisée pour comparer dans les mêmes situations nos conditions et les conditions convectives, montrant une amélioration de la transparence. Les nouvelles conditions n'introduisant pas de vitesse supplémentaire elles n'affectent pas la stabilité CFL du calcul contrairement aux conditions convectives. Pour ces dernières, le choix de la vitesse d'advection peut amener une contrainte plus forte sur le pas de temps que le calcul du reste du domaine. Les nouvelles conditions ont une transparence légèrement meilleure (78% ou 47% selon qu'on conserve des termes non-linéaires), pour un coût de calcul sensiblement identique.

Références

- [1] Viaud, B., Serre, E. and Chomaz, J.M. 2008 The elephant mode between two rotating disks. *J. Fluid Mech.* **598** 451-464
- [2] Raspo, I., Hugues, S., Serre, E., Randriamampianina, A. and Bontoux, P. 2002 A spectral projection method for the simulation of complex three-dimensional rotating flows. *Comp. and Fluids* **31** 745-767
- [3] Halpern, L. and Schatzman, M. 1989 Artificial boundary conditions for incompressible viscous flows. *J. Math. Anal.* **20** 308-353
- [4] Orlanski, I. 1976 A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. of Comp. Physics* **21** 251-270
- [5] Ruith, M.T., Chen, P. and Meiburg, E. 2004 Development of boundary conditions for DNS of three-dimensional vortex breakdown phenomena in semi-infinite domains. *Comp. and Fluids* **33** 1225-1250
- [6] Fournier, G., Golanski, F. and Pollard, A. 2008 Novel outflow boundary condition for incompressible laminar wall-bounded flows. *J. of Comp. Physics* **227** 7077-7082